مبرهنة (٩) (طريقة غرام- شميث لتشكيل قاعدة منظمة):

في كل فضاء هيلبرت H الفصول وغير منته الأبعاد توجد جملة تامة $h_1, h_2, \ldots\ldots$ كما أن التركيبات الخطية المنتهية للعناصر $h_1, h_2, \ldots\ldots$ تشكل مجموعة كثيفة في H.

الإثبات :

بما أن H فصول فتوجد فيه مجموعة كثيفة وقابلة للعد ولتكن $x_1, x_2, \ldots$ وهنا يمكننا أن نأخذ $x_k \neq \theta$ من أجل $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

نأخذ : $h_1 := \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ فيكون $\|h_1\| = 1$.

ثم نضع : $h_2' := x_2 - \langle x_2, h_1 \rangle h_1$ فنجد $\langle h_2', h_1 \rangle = 0$.

فإذا كانت : $h_2' = \theta$ نهمله وإلاّ فإنّ : $h_2 := \dfrac{h_2'}{\|h_2'\|}$

فيكون لدينا $\|h_2\| = 1$ ، وكذلك $\langle h_2, h_1 \rangle = 0$.

لنضع الآن $h_3' := x_3 - \langle x_3, h_1 \rangle h_1 - \langle x_3, h_2 \rangle h_2$ فنجد أنّ :

$$\langle h_3', h_1 \rangle = \langle h_3', h_2 \rangle = 0$$

فإذا كان : $h_3' = \theta$ نهمله وإلا فنأخذ $h_3 := \dfrac{h_3'}{\|h_3'\|}$.

وهكذا نتابع بالتدرج نفسه حيث نضع: $h_n' := x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, h_k \rangle h_k$ فنجد أن:

$\langle h_n', h_k \rangle = 0$ حيث $(k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$

وهنا إذا كان $h_n' = \theta$ نهمله وإلاّ نأخذ: $h_n = \dfrac{h_n'}{\|h_n'\|}$ فيكون $\|h_n\| = 1$ كما أنّ $\langle h_n, h_k \rangle = 0$ من أجل $k = 1, 2, \ldots, n-1$. وبذلك نكون قد حصلنا على جملة متعامدة منظمة $h_1, h_2, \ldots$.

ومن العلاقات السابقة نجد:

$$x_1 = \| x_1 \| h_1$$

$$x_2 = \langle x_2, h_1 \rangle h_1 + \| h_2' \| h_2$$

...

...

$$x_n = \sum_{k-1}^{n-1} \langle x_n, h_k \rangle h_k + \| h_n' \| h_n$$

أي أن العناصر $x_1, x_2, \ldots$ يمكن كتابتها بشكل تراكيب خطية منتهية لعناصر الجملة المتعامدة المنظمة $h_1, h_2, \ldots$. ولما كانت العناصر $x_1, x_2, \ldots$ عبارة عن مجموعة كثيفة في H فإن مجموعة كل التراكيب الخطية المنتهية للعناصر $h_1, h_2, \ldots$ كثيفة في H.

لنثبت الآن أن هذه الجملة تامة .

من أجل كل عنصر $y \in H$ توجد متتالية $\{ y_n \}$ من التراكيب الخطية المنتهية (أي $y_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \lambda_j^{(n)} h_j$) بحيث يكون: $\lim_{n \to \infty} y_n = y$.

بفرض أنّ : $\langle y, h_k \rangle = 0 \quad ; \quad (h = 1, 2, \ldots)$ فيكون لدينا:

$$\| y \|^2 = \langle y, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle y_n, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k(n)} \lambda_j^{(n)} \langle y, h_j \rangle = 0$$

إذاً $y = \theta$ وبحسب المبرهنة (٨) السابقة فإن الجملة $h_1, h_2, \ldots$ تامة.

مبرهنة (١٠) :

جميع فضاءات هيلبرت الفصولة وغير المنتهية البعد إيزومورفية مع الفضاء ℓ_2 وبالتالي جميع هذه الفضاءات إيزومورفية لبعضها البعض .

الإثبات :

ليكن H أي فضاء هيلبرت فصول وغير منته الأبعاد، عندئذ وحسب المبرهنة (٩) السابقة يوجد في H جملة تامّة ولتكن $h_1, h_2, \ldots$ وبالتالي من أجل كل عنصر $x \in H$ تتحقق مساواة بارسيفال :

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \alpha_k |^2 = \| x \|^2$$

حيث إن $\alpha_k = \langle x, h_k \rangle$ عوامل فوريه للعنصر x .

من هذا نجد أن المتتالية العددية $\alpha := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ....\}$ تنتمي للفضاء ℓ_2 .

لنعرف الآن التطبيق φ بالشكل :

$$\varphi : H \longrightarrow \ell_2$$
$$x \mapsto \varphi(x) = \alpha$$

من أجل أي عنصرين x, y من H وعوامل فوريه لهما :

$$\alpha_k = \langle x, h_k \rangle \quad \& \quad \beta_k = \langle y, h_k \rangle \quad ; \quad k = 1,2,3......$$

بذلك يكون: $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\} \in \ell_2$ و $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...\} \in \ell_2$.

ومن أجل عددين عقديين λ, μ فإنّ :

$$\langle \lambda x + \mu y, h_k \rangle = \lambda \alpha_k + \mu \beta_k \quad ; \quad k = 1,2,3......$$

حسب مساواة بارسيفال يكون :

$$\| x \|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \| \alpha \|_{\ell_2}^2 \quad ; \quad \forall x \in H$$

وبالتالي:

$$\| \varphi(x) \|_{\ell_2} = \| x \|_H \quad ; \quad \forall x \in H$$

أي أن φ يحافظ على النظيم وينتج من هذا أن φ متباين .

وليرهان أن φ غامر نأخذ أي عنصر $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\}$ من ℓ_2 ، ولنضع $z_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k h_k$ عندئذ يكون $z_n \in H$ من أجل كل $n = 1,2,3...$.

من أجل $n > m$ يكون :

$$\| z_n - z_m \|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \xi_k h_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\xi_k|^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

وبالتالي فإن المتتالية $\{z_n\}$ متتالية كوشي في H ، وبما أن H تام فيوجد عنصر $z \in H$ بحيث إن $z = \lim_{n \to \infty} z_n$.

ولكن :

$$\langle z, h_j \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z_n, h_j \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle h_k, h_j \rangle = \xi_j \quad ; \quad j = 1,2,3,\ldots$$

أي أن الأعداد $\xi_1, \xi_2, \ldots$ هي عوامل فورييه للعنصر z .

إذاً φ غامر ولهذا فإن φ إيزومورفيزم من H إلى ℓ_2 إذاً H و ℓ_2 إيزومورفيان لبعضهما. وطالما أن H اختياريّ نكون قد حصلنا على المطلوب .

(٤-٣) تمارين محلولة :

تمرين محلول (١):

ليكن x, y عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة التكافؤ :

$$x \perp y \Leftrightarrow \| x + \alpha y \| = \| x - \alpha y \| \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

الحل :

$(\Rightarrow)$: $x \perp y \Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$ وبالتالي لدينا:

$$\bullet \| x + \alpha y \|^2 = \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \| x \|^2 + |\alpha|^2 . \| y \|^2 + \alpha \langle y, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$$

$$= \| x \|^2 + |\alpha|^2 . \| y \|^2 + 2\operatorname{Re} \underbrace{\alpha \langle x, y \rangle}_{=0} = \| x \|^2 + |\alpha|^2 . \| y \|^2$$

$$\bullet \| x - \alpha y \|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \| x \|^2 + |\alpha|^2 . \| y \|^2 - 2\operatorname{Re} \underbrace{\alpha \langle x, y \rangle}_{=0}$$

$$= \| x \|^2 + |\alpha|^2 . \| y \|^2$$

لذلك فإن : $\| x + \alpha y \| = \| x - \alpha y \|$.

$(\Leftarrow)$: بفرض أن $\| x + \alpha y \| = \| x - \alpha y \|$ عندئذٍ يكون:

$$\| x \|^2 + |\alpha|^2 . \| y \|^2 + 2\operatorname{Re} \alpha \langle x, y \rangle = \| x \|^2 + |\alpha|^2 . \| y \|^2 - 2\operatorname{Re} \alpha \langle x, y \rangle \Rightarrow$$

$$4\operatorname{Re} [\alpha \langle x, y \rangle] = 0$$

$$\bullet \alpha = 1 \Rightarrow 4\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 0$$

العدد = مرافقه عندما يكون حقيقي

$$\bullet \alpha = i \Rightarrow \| x + i y \| = \| x - i y \|$$

أي أن $\langle x + i y, x + i y \rangle = \langle x - i y, x - i y \rangle$.

ومنه فإن: $\operatorname{Im} \langle x, y \rangle = 0$ وبالتالي فإن $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$.

الفصل الخامس
المؤثرات الخطية
Linear operators

تلعب المؤثرات دوراً هاماً في التحليل التابعي، وتشغل نظرية المؤثرات حيزاً كبيراً وهاماً فيه. وفي هذا الفصل سندرس بعض المفاهيم والمبادئ الأساسية حول المؤثرات، والداليات. وسنركز على المؤثرات الخطية والمحدودة في الفضاءات الخطية المنظمة .

(٥-١) تعاريف ومفاهيم أساسية :

ليكن E_1 و E_2 فضاءين خطيين. كل تطبيق A من الفضاء E_1 معطى بالشكل:

$$y = A(x) \;; x \in E_1 \quad و \quad y \in E_2$$

نسميه مؤثراً من E_1 إلى E_2 ونكتب: $A : E_1 \longrightarrow E_2$

$$x \mapsto y = A(x)$$

وللاختصار سنكتب Ax بدلاً من $A(x)$.

ساحة المؤثر A (أو منطقة تعريفه) هي مجموعة تلك العناصر x من E_1 والتي من أجلها يكون A معرفاً وسوف نرمز لها بـ $D(A)$ أو D_A وليس بالضرورة أن تكون $D(A)$ مساوية لكل الفضاء E_1. ولكن سنفرض دوماً أن $D(A)$ فضاء خطي جزئي من E_1 .

أما مدى المؤثر A (أو مجموعة قيمه) والتي سنرمز لها بـ $R(A)$ فهي:

$$R(A) = \{ y \in E_2 : y = Ax \quad and \quad x \in D(A) \}$$

ونذكر هنا أن الدالي الخطي هو مؤثر خطي من الفضاء الخطي E إلى حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (عندما يكون الفضاء E حقيقياً) أو إلى حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ (عندما يكون الفضاء E عقدياً) وسنخصص الفصل السادس لدراسة الداليات الخطية .

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$E \times E \longrightarrow$

١ – خواص المؤثرات في الفضاءات الخطية المنظمة :

تعريف (١) :

نسمي المؤثر $A: E_1 \longrightarrow E_2$ مؤثراً خطياً إذا كان:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$$

وذلك مهما يكن العددان λ_1 و λ_2 ومهما يكن العنصران x_1 و x_2 من $D(A)$.

ملاحظة (١) :

من التعريف السابق نستنتج مباشرة أن: $A\theta_1 = \theta_2$.

حيث يرمز θ_1 و θ_2 إلى صفري الفضاءين E_1 و E_2 على الترتيب، وينتج هذا بتعويض $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

كما نستنتج أن:

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 \ \ ; \ \forall x_1, x_2 \in D(A)$$

وينتج هذا بأخذ $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 1$.

تعريف (٢)

نقول عن المؤثر A إنه مستمر في النقطة $x_0 \in D(A)$ إذا وجد من أجل أي جوار V للنقطة y_0 (حيث $y_0 = Ax_0$) جوار U للنقطة x_0 بحيث يكون:

$$Ax \in V \ \ ; \ \forall x \in U \cap D(A)$$

ونقول إن A مستمر على ساحته $D(A)$ إذا كان A مستمراً في كل نقطة $x \in D(A)$.

ملاحظة (٢) :

إذا كان E_1 و E_2 فضاءين منظمين فيمكن صياغة تعريف المؤثر المستمر كما يلي:

نقول عن المؤثر A إنه مستمر في النقطة $x_0 \in D(A)$ إذا نتج من $\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ أن $\|Ax_n - Ax_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وذلك من أجل أي متتالية $\{x_n\}$ من عناصر $D(A)$ ومتقاربة في E_1 من x_0.

وبعبارة أخرى: يكون A مستمراً في $x_0 \in D(A)$ إذا وجد من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$

عدد $0<\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث أنه من أجل $\|x_n-x_0\|<\delta$ ينتج أن $\|Ax_n-Ax_0\|<\varepsilon$
وذلك مهما تكن $\{x_n\}$ من عناصر $D(A)$ متقاربة في E_1 من x_0.

تعريف (٣) (النواة):

ليكن المؤثر $A:E_1\longrightarrow E_2$ ، ندعو مجموعة العناصر x من $D(A)$ والتي من أجلها $Ax=\theta_2$ نواة المؤثر A ونرمز لها بـ $Ker\,A$.

أي أن:

$$Ker\,A=\{x\in E_1\,|\,A(x)=\theta_2\}$$

إذا كان لدينا معادلتين
$2x+y=0$
$3x-y=0$
نبحث عن النواة لحلها وعندها
$Ker\,A=\{\theta_1\}$

ملاحظة (٣):

أ) المجموعة $Ker\,A$ تشكل دوماً فضاءً خطياً جزئياً من ساحة التعريف $D(A)$.

ب) إذا كان المؤثر A مستمراً على ساحة $D(A)$ فإن $Ker\,A$ فضاء خطي جزئي، ولكن مداه $R(A)$ ليس بالضرورة فضاء خطياً جزئياً في E_2 حتى ولو كان $D(A)=E_1$.

٢- أمثلة على المؤثرات الخطية:

(١)- ليكن الفضاء الخطي E. عندئذٍ I:

$$I=E\longrightarrow E$$
$$x\mapsto I(x)=x$$

يعرّف لنا مؤثراً خطياً ندعوه بالمؤثر المطابق.

(٢)- ليكن E_1 و E_2 فضاءين خطيين منظمين. عندئذٍ O:

$$O=E_1\longrightarrow E_2$$
$$x\mapsto O(x)=\theta_2$$

(العنصر θ_2 الصفري للفضاء E_2).

يعرف لنا مؤثراً خطياً ندعوه بالمؤثر الصفري.

(٣)- ليكن المؤثر الخطي $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$

ولتكن $e_1, e_2,\dots, e_n$ قاعدة في $\mathbb{R}^n$ و $f_1,f_2,\dots, f_m$ قاعدة في $\mathbb{R}^m$ إن كل عنصر

Scanned by CamScanner

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يكتب بالشكل: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

وبالتالي يكون (طالما أن A خطي):

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \, Ae_i$$

ولكن وبما أن:

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} f_k$$

فالمؤثر A يتعين بواسطة المصفوفة (a_{ik})

(٤)- ليكن H_1 فضاءً جزئياً مغلقاً من فضاء هيلبرت H. عندئذٍ وبحسب المبرهنة (٦) من الفصل الرابع يمكن كتابة كل عنصر x من H بالشكل:

$$x = x_1 + x_2 \;\; ; \;\; x_1 \in H_1 \text{ و } x_2 \in H_1^{\perp}$$

ندعو المؤثر p المعرف بالشكل:

$$p : H \longrightarrow H_1$$
$$x \mapsto px = x_1$$

بمؤثر الإسقاط لأنه يسقط H عمودياً على H_1، وهذا المؤثر خطي ومستمر.

(٥)- ليكن $k(x,t)$ تابعاً مستمراً على المنطقة $[a,b] \times [a,b]$ وليكن المؤثر:

$$A : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

المعرف بالشكل: $\phi \in C[a,b] \;\; ; \;\; (A\phi)_{(x)} = \int_a^b k(x,t)\phi(t)\,dt$

وهذا المؤثر خطي ومستمر.

(٦)- المؤثر التفاضلي (Differential operator):

ويعتبر من أهم الأمثلة على المؤثرات الخطية، حيث يمكن دراسته في فضاءات عدة، ولنتعرف على بعضها :

(أ) ليكن المؤثر D:

$$D : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$f(x) \mapsto Df = f'$$

حيث هنا $f' = f'(x)$ مشتق التابع المستمر $f(x)$.

إن المؤثر D هذا معرف على مجموعة جزئية من الفضاء $C[a,b]$ وليس على كل هذا الفضاء ، حيث $D(A)$ تمثل مجموعة التوابع المستمرة والقابلة للاشتقاق والتي مشتقاتها مستمرة على المجال $[a,b]$.

من الواضح أن D خطي، ولكنه غير مستمر. فمثلاً لو أخذنا المتتالية $\{f_n(x)\}$ من التوابع المستمرة على المجال $[a,b]$ حيث :

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \; ; \; n = 1, 2, ... \quad \text{و} \quad x \in [a,b]$$

لوجدنا أن $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ولكن المتتالية $\{Df_n(x)\}$ حيث:

$$Df_n(x) = \cos nx \; ; \; n = 1, 2, ...$$

متتالية غير متقاربة.

(ب) إذا أخذنا المؤثر D بالشكل: $D : C^1[a,b] \longrightarrow C[a,b]$

حيث هنا $C^1[a,b]$ هو فضاء التوابع المستمرة والقابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ ومشتقها الأول تابع مستمر على المجال $[a,b]$ ، وأخذنا فيه النظيم:

$$\|f\|_{C^1} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

فيكون D في هذه الحالة خطياً ومستمراً ويطبق كل الفضاء $C^1[a,b]$ في الفضاء $C[a,b]$ (أي أن $D(D) = C^1[a,b]$).

(ج) لنرمز بـ $C^\infty[a,b]$ لمجموعة كل التوابع القابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات ومشتقاتها مستمرة على المجال $[a,b]$. ويمكن تعريف نظيم على هذه المجموعة بالشكل:

$$\|f\|_n = \sup_{\substack{0 \le k \le n \\ a \le x \le b}} \left| f^{(k)}(x) \right| \; ; \; n = 1, 2, 3, ...$$

ولنأخذ المؤثر D الوارد في (ب) ونعتبر أن $D(A)=C^{\infty}[a,b]$. عندئذ نجد أن هذا المؤثر الذي يطبق $C^{\infty}[a,b]$ في نفسه (أي أن $Df(x)$ هو من جديد عنصر من $C^{\infty}[a,b]$ وذلك مهما يكن $f(x)$ من $C^{\infty}[a,b]$) هو مؤثر مستمر.

(٥-٢) الاستمرار والمحدودية :

تعريف (٤) :

ليكن المؤثر $A:E_1\longrightarrow E_2$ ، حيث E_1 و E_2 فضاءان خطيان منظمان. نقول عن المؤثر A إنه محدود إذا نقل كل مجموعة محدودة M في E_1 إلى مجموعة محدودة في E_2.

حيث:

$$E_1 \supseteq D(A) \supseteq M$$

ملاحظة (٤) :

ليكن المؤثر الخطي $A:E_1\longrightarrow E_2$ حيث E_1 و E_2 فضاءان خطيان منظمان. عندئذ نجد من التعريف السابق أن المؤثر A يكون محدوداً إذا نقل كل كرة محدودة في E_1 إلى مجموعة محدودة في E_2.

وبعبارة أخرى:

يكون المؤثر A محدوداً إذا وجد عدد ثابت موجب C بحيث يكون:

$$\|Ax\|_{E_2} \leq C\|x\|_{E_1} \;;\; \forall x\in D(A)\subseteq E_1$$

تعريف (٥) :

ليكن المؤثر المحدود $A:E_1\longrightarrow E_2$ عندئذ نسمي أصغر عدد C محقق للمتراجحة

$$\|Ax\|_{E_2} \leq C\|x\|_{E_1} \;;\; x\in D(A)\subseteq E_1$$

بنظيم المؤثر A ونرمز له بـ $\|A\|$.

ملاحظة (٥) :

من أجل أي مؤثر محدود $A:E_1\longrightarrow E_2$ يكون لدينا:

$$\|Ax\|_{E_2} \leq \|A\|\|x\|_{E_1} \;;\; x\in D(A)$$

وهذا ينتج مباشرة من التعريف.

نتعرف فيما يلي على بعض خواص المؤثر الخطي المتعلقة بالاستمرار والمحدودية.

مبرهنة (١) :

إذا كان المؤثر الخطي $A:E_1 \longrightarrow E_2$ مستمراً في النقطة $x_0 \in E_1$ فيكون عندئذ مستمراً على كل E_1.

الإثبات :

لتكن x نقطة ما من E_1، حيث $x \neq x_0$. ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر E_1 بحيث: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ أي أن $\|x_n - x\|_{E_1} \longrightarrow 0$.

لدينا الآن :

$$\|(x_n - x + x_0) - x_0\|_{E_1} = \|x_n - x\|_{E_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي أن المتتالية $\{(x_n - x + x_0)\}$ متقاربة في E_1 من x_0 . وبما أن المؤثر A مستمر في x_0 فإن :

$$\|A(x_n - x + x_0) - Ax_0\|_{E_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولكن (طالما أن المؤثر A خطي):

$$A(x_n - x + x_0) - Ax_0 = Ax_n - Ax + Ax_0 - Ax_0$$
$$= Ax_n - Ax$$

إذن:

$$\|Ax_n - Ax\|_{E_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وهذا يعني أن المؤثر A مستمر في النقطة $x \in E_1$ ولما كانت x اختيارية من E_1 فإن A مستمراً على كل الفضاء E_1 وهو المطلوب.

مبرهنة (٢) :

ليكن المؤثر الخطي $A:E_1 \longrightarrow E_2$. عندئذ يكون A مستمراً إذا وفقط إذا كان محدوداً..

الإثبات:

1- نفترض أن المؤثر A محدود ولنبرهن أنه مستمر